CONSELHO REGIONAL DE CONTABILIDADE – CRC/CE

CURSO DE

MATEMÁTICA

FINANCEIRA

Instrutor: CRISTIANO REINALDO

ABRIL/2005

'RODUÇÃO

Ao longo dos tempos constatou-se que o problema econômico dos governos; das instituições; das organizações e dos indivíduos, decorria da escassez de produtos e/ou serviços, pelo fato de que as necessidades das pessoas eram satisfeitas por bens e serviços cuja oferta era limitada. Ao longo do processo de desenvolvimento das sociedades, o problema de satisfazer as necessidades foi solucionado através da especialização e do processo de troca de um bem pelo outro, conhecido como escambo. Mais tarde surgiu um bem intermediário, para este processo de trocas que foi a moeda. Assim, o valor monetário ou preço propriamente dito, passou a ser o denominador comum de medida para o valorizar os bens e os serviços e a moeda um meio de acúmulo deste valor constituindo assim a riqueza ou capital.

Constatou-se assim, que os bens e os serviços poderiam ser consumidos ou guardados para o consumo futuro. Caso o bem fosse consumido ele desapareceria e, caso houvesse o acúmulo, surgiria decorrente deste processo o estoque que poderia servir para gerar novos bens e/ou riqueza através do processo produtivo. E começou a perceber que os estoques eram feitos não somente de produtos, mas de valores monetários também, que se bem administrado poderiam aumentar gradativamente conforme a utilidade temporal.Surge-se daí a preocupação e a importância do acúmulo das riquezas em valores monetários como forma de investimento futuro e aumento do mesmo conforme o surgimento das necessidades.

Com o passar dos tempos essa técnica foi sendo melhorada e aperfeiçoada conforme as necessidades de produção e tão quanto à necessidade mercantis que aflorava cada vez mais tornando os produtores mais competitivos quanto ao aumento de oferta de suas produções.

Atualmente a técnica utilizada para compreensão de como o capital se comporta em uma aplicação ao longo do tempo é realizado pela Matemática Financeira. De uma forma simplificada, podemos dizer que a Matemática Financeira é o ramo da Matemática Aplicada e/ou Elementar, que estuda o comportamento do dinheiro no tempo. A Matemática Financeira busca quantificar as transações que ocorrem no universo financeiro levando em conta, a variável tempo, quer dizer, o valor monetário no tempo (*time value money*).

As principais variáveis envolvidas no processo de quantificação financeira são: o capital, a taxa de juros e o tempo.

2 - CAPITAL

Capital é todo o acúmulo de valores monetários em um determinado período de tempo constituindo assim a riqueza como expresso anteriormente. Normalmente o valor do capital é conhecido como principal **(P)**. A taxa de juro **(i)**, é a relação entre os Juros e o Principal, expressa em relação a uma unidade de tempo.**(n)**

3 - JUROS

Deve ser entendido como Juros, a remuneração de um capital **(P)**, aplicado a uma certa taxa **(i)**, durante um determinado período **(n)**, ou seja, é o dinheiro pago pelo uso de dinheiro emprestado. Portanto, Juros (J) = preço do crédito.

A existência de Juros decorre de vários fatores, entre os quais destacam-se:

a) **inflação:** a diminuição do poder aquisitivo da moeda num determinado período de tempo;

b) **risco:** os juros produzidos de uma certa forma compensam os possíveis riscos do investimento.

c) **aspectos intrínsecos da natureza humana:** quando ocorre de aquisição ou oferta de empréstimos a terceiros.

Costuma-se especificar taxas de juros anuais, trimestrais, semestrais, mensais, entre outros, motivo pelo qual deve-se especificar sempre o período de tempo considerado.

Quando a taxa de juros incide no decorrer do tempo, sempre sobre o capital inicial, dizemos que temos um sistema de capitalização simples (Juros simples). Quando a taxa de juros incide sobre o capital atualizado com os juros do período (montante), dizemos que temos um sistema de capitalização composta (Juros compostos).

Na prática, o mercado financeiro utiliza apenas os juros compostos, de crescimento mais rápido (veremos adiante, que enquanto os juros simples crescem segundo uma função do 1º grau – crescimento linear, os juros compostos crescem muito mais rapidamente – segundo uma função exponencial).

3.1 – Juros Simples

O regime de juros simples é aquele no qual os juros incidem sempre sobre o capital inicial. Este sistema não é utilizado na prática nas operações comerciais, mas, a análise desse tema, como introdução à Matemática Financeira, é de uma certa forma, importante.

Considere o capital inicial **P** aplicado a juros simples de taxa **i** por período, durante **n** períodos.

Lembrando que os juros simples incidem sempre sobre o capital inicial, podemos escrever a seguinte fórmula, facilmente demonstrável:

$$\boxed{J = P \cdot i \cdot n = Pin}$$

J = juros produzidos depois de **n** períodos, do capital **P** aplicado a uma taxa de juros por período igual a **i**.

No final de n períodos, é claro que o capital será igual ao capital inicial adicionado aos juros produzidos no período. O capital inicial adicionado aos juros do período é denominado **MONTANTE (M)**. Logo, teríamos:

$$\boxed{} \longrightarrow \boxed{M = P(1 + i.n)}$$

Exemplo:

A quantia de R$ 3.000,00 é aplicada a juros simples de 5% ao mês, durante cinco anos. Calcule o montante ao final dos cinco anos.

Solução:

Temos: P = 3000,

i = 5% = 5/100 = 0,05 e

n = 5 anos = 5 x 12 = 60 meses.

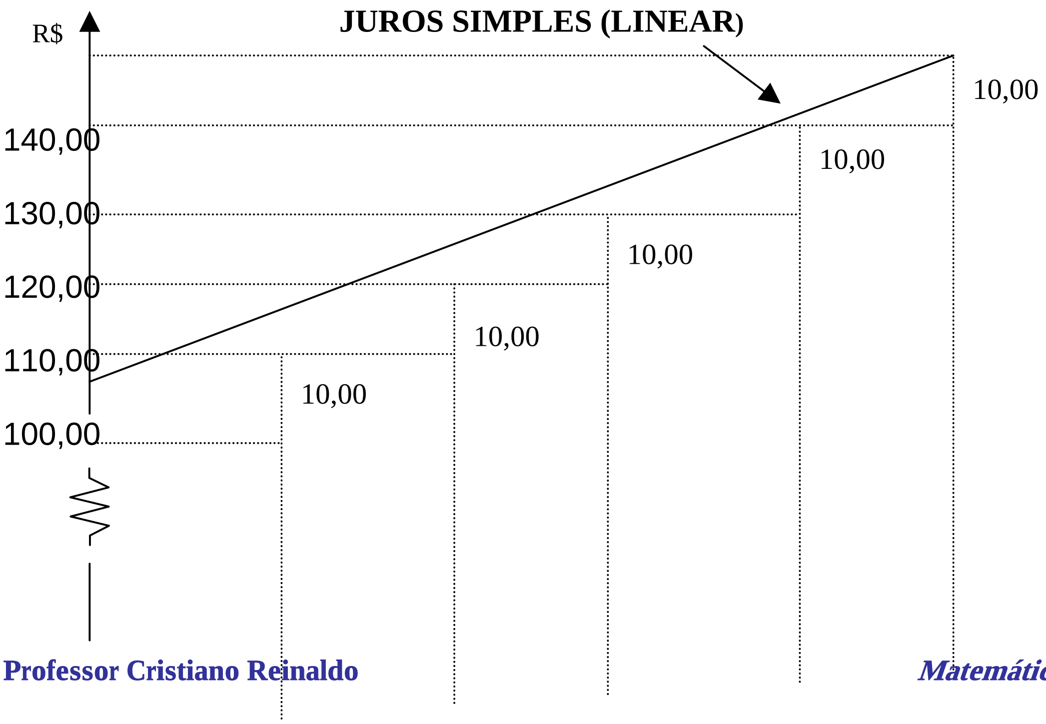
Portanto, M = 3.000,00 x (1 + 0,05 x 60) = 3.000,00 x (1+3) = R$ 12.000,00.

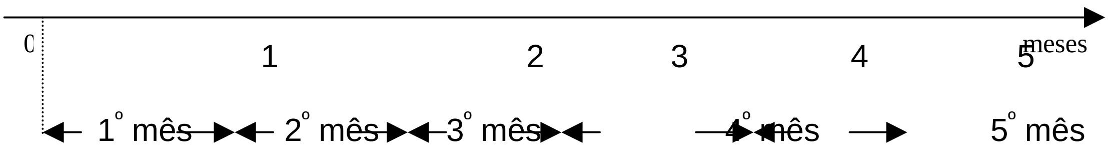
A fórmula **J = Pin**, onde **P** e **i** são conhecidos, nos leva a concluir pela linearidade da função juros simples, senão vejamos:

Façamos P.i = k.

Teremos, J = k.n, onde k é uma constante positiva. (Observe que P . i > 0)

Ora, J = k.n é uma função linear, cujo gráfico é uma semi-reta passando pela origem. (Porque usei o termo semi-reta ao invés de reta?). Portanto, J/n = k, o que significa que os juros simples J e o número de períodos n são grandezas diretamente proporcionais. Daí infere-se que o crescimento dos juros simples obedece a uma função linear, cujo crescimento depende do produto P.i = k, que é o coeficiente angular da semi-reta J = kn.





É comum nas operações de curto prazo onde predominam as aplicações com taxas referenciadas em juros simples, ter-se o prazo definido em número de dias. Nestes casos o número de dias pode ser calculado de duas maneiras:

- Pelo tempo exato , pois o juro apurado desta maneira denomina-se **juro exato,** que é aquele que é obtido quando o período (n) está expresso em dias e quando o período é adotada a conversão de ano civil (365 dias)

- Pelo ano comercial, pois o juro apurado desta maneira denomina-se **juro comercial** que é aquele calculado quando se adota como base o ano comercial (360 dias)

Exercício Proposto 01:

Calcule o montante ao final de dez anos de um capital R$ 10.000,00 aplicado à taxa de juros simples de 18% ao semestre (18% a.s).

Resposta: R$ (?)

Vimos anteriormente, que se o capital **(P)** for aplicado por **(n)** períodos, a uma taxa de juros simples **(i)**, ao final dos n períodos, teremos que os juros produzidos serão iguais a **J = Pin** e que o montante (capital inicial adicionado aos juros do período) será igual a **M = P(1 + in)**.

O segredo para o bom uso destas fórmulas é lembrar sempre que a taxa de juros i e o período n têm de ser referidos à mesma unidade de tempo.

Assim, por exemplo, se num problema, a taxa de juros for i =12% ao ano = 12/100 = 0,12 e o período n = 36 meses, antes de usar as fórmulas deveremos colocá-las referidas à mesma unidade de tempo, ou seja:

a) 12% ao ano, aplicado durante 36/12 = 3 anos , ou

b) 1% ao mês = 12%/12, aplicado durante 36 meses, etc.

Exemplos:

01 – Quais os juros produzidos pelo capital R$ 12.000,00 aplicados a uma taxa de juros simples de 10% ao bimestre durante 5 anos?

Solução 01:

Temos que expressar **i** e **n** em relação à mesma unidade de tempo. Vamos inicialmente trabalhar com BIMESTRE (dois meses):

i = 10% a.b. = 10/100 = 0,10

n = 5 anos = 5 x 6 = 30 bimestres (pois um ano possui 6 bimestres)

Então: J = R$ 12.000,00 x 0,10 x 30 = **R$ 36.000,00**

Solução 02:

Para confirmar, vamos refazer as contas, expressando o tempo em meses.

Teríamos:

i = 10% a x b = 10/2 = 5% ao mês = 5/100 = 0,05

n = 5 anos = 5 x 12 = 60 meses

Então: J = R$ 12.000,00 x 0,05 x 60 = **R$ 36.000,00**

02 – Um certo capital é aplicado em regime de juros simples, a uma taxa mensal de 5%. Depois de quanto tempo este capital estará duplicado?

Solução 01:

Temos: M = P(1 + in). Logo, o capital estará duplicado quando M = 2P. Logo, vem:

2P = P(1 + 0,05n); (observe que i = 5% a.m. = 5/100 = 0,05).
Simplificando, fica:

2 = 1 + 0,05n 1 = 0,05n, de onde conclui-se n = 20 meses ou 1 ano e oito meses.

Exercício Proposto 02:

Um certo capital é aplicado em regime de juros simples, a uma taxa anual de 10%. Depois de quanto tempo este capital estará triplicado?

Resposta: (?) anos.

3.2 – Juros Compostos

O capital inicial (principal) pode crescer, como já sabemos, devido aos juros, segundo duas modalidades, a saber:

a) Juros simples - ao longo do tempo, somente o principal rende juros;

b) Juros compostos - após cada período, os juros são incorporados ao principal e passam, por sua vez, a render juros. Também conhecido como "juros sobre juros".

O regime de juros compostos considera que os juros formados em cada período são acrescidos ao capital formando um montante, capital mais juros, do período. Este montante, por sua vez, passará a render juros no período seguinte formando um novo montante e assim sucessivamente.Pode-se dizer então, que cada montante formado é constituído do capital inicial, juros acumulados e dos juros sobre juros formados em períodos anteriores.

Este processo de formação de juros compostos é diferente daquele descrito para os juros simples, onde somente o capital rende juros, não ocorrendo remuneração sobre os juros formados em períodos anteriores.

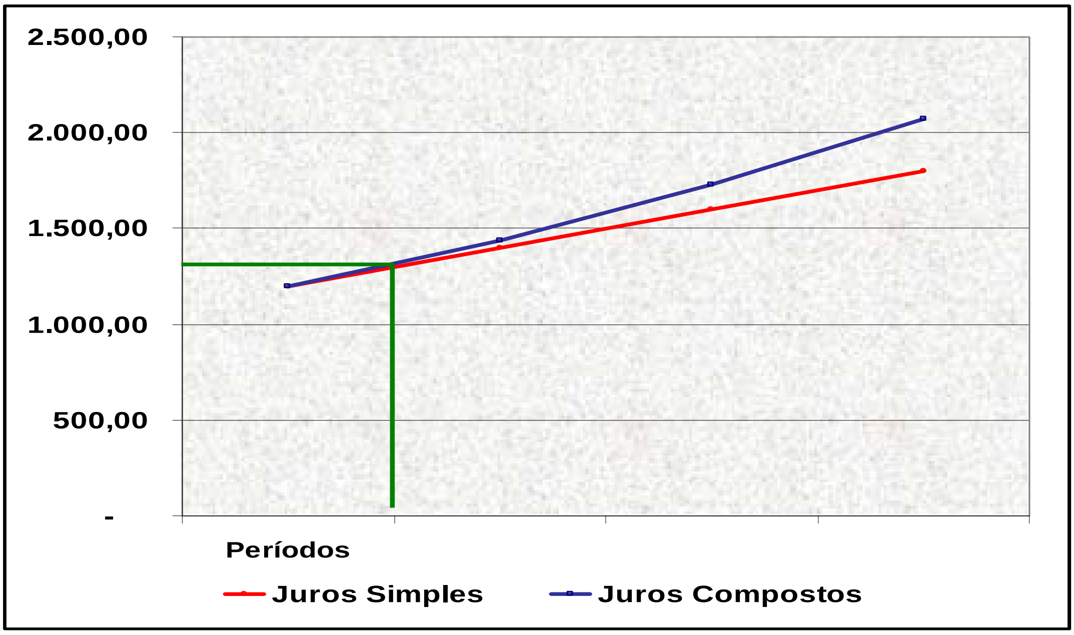
Vamos ilustrar a diferença entre os crescimentos de um capital através juros simples e juros compostos, com um exemplo:

Suponha que R$ 1.000,00 são empregados a uma taxa de 20% a.a.,por um período de 4 anos a juros simples e compostos Teremos:

P= R$ 1.000,00 i= 20% a.a n= 4 anos

n	Juros Simples		Juros Compostos	
	Juros por periodo	Montante	Juros por periodo	Montante
1	1.000,00 x 0,2 = 200	1.200,00	1.000,00 x 0,2 = 200	1.200,00
2	1.000,00 x 0,2 = 200	1.400,00	1.200,00 x 0,2 = 240	1.440,00
3	1.000,00 x 0,2 = 200	1.600,00	1.440,00 x 0,2 = 288	1.728,00
4	1.000,00 x 0,2 = 200	1.800,00	1.728,00 x 0,2 = 346	2.074,00

O gráfico a seguir permite uma comparação visual entre os montantes no regime de juros simples e de juros compostos. Verificamos que a formação do montante em juros simples é linear e em juros compostos é exponencial:



Fonte: Elaborado pelo autor

Observe que o crescimento do principal segundo juros simples é **LINEAR** enquanto que o crescimento segundo juros compostos é **EXPONENCIAL**, portanto tem um crescimento muito mais "rápido".

Exemplo 2:

Um empresário faz uma aplicação de R$ 1.000,00 a taxa composta de 10% ao mês por um prazo de dois meses.

1º Mês:

O capital de R$ 1.000,00 produz um juros de R$ 100,00 (10% de R$ 1.000,00), pela fórmula dos juros simples já estudada anteriormente, ficaria assim:

$M = C \times (1 + i) \longrightarrow M = 1.000,00 \times (1 + 0,10) \longrightarrow M = 1.100,00$

2º Mês:

O montante do mês anterior (R$ 1.100,00) é o capital deste 2º mês servindo de base para o cálculo dos juros deste período. Assim:

$M = 1.100,00 \times (1 + 0,10) \longrightarrow M = 1.210,00$

Tomando-se como base a fórmula dos juros simples o montante do 2º mês pode ser assim decomposto:

$M = C \times (1 + i) \times (1 + i)$ $\rightarrow$ $M = 1.000{,}00 \times (1 + 0{,}10) \times (1 + 0{,}10)$ $\rightarrow$

$M = 1.000{,}00 \times (1 + 0{,}10)^2$ $\rightarrow$ $M = 1.210{,}00$

Exemplo 3:

A loja São João financia a venda de uma mercadoria no valor de R$ 16.00,00, sem entrada, pelo prazo de 8 meses a uma taxa de 1,422. Qual o valor do montante pago pelo cliente.

$M = C \times (1 + i)^n$ $M = 16.000{,}00 \times (1 + 1{,}422)^8$ $M = 22.753{,}61$

Na prática, as empresas, órgãos governamentais e investidores particulares costumam reinvestir as quantias geradas pelas aplicações financeiras, o que justifica o emprego mais comum de juros compostos na Economia. Na verdade, o uso de juros simples não se justifica em estudos econômicos.

Fórmula para o cálculo de Juros compostos

Considere o capital inicial (P) R$ 1.000,00 aplicado a uma taxa mensal de juros compostos (i) de 10% (i = 10% a.m.). Vamos calcular os montantes (principal + juros), mês a mês:

- Após o 1º mês, teremos: $M_1 = 1000 \times 1{,}1 = 1100 = 1000(1 + 0{,}1)$
- Após o 2º mês, teremos: $M_2 = 1100 \times 1{,}1 = 1210 = 1000(1 + 0{,}1)^2$
- Após o 3º mês, teremos: $M_3 = 1210 \times 1{,}1 = 1331 = 1000(1 + 0{,}1)^3$

Dando continuidade ao raciocínio dos juros compostos, a evolução dos juros que incide a um capital para cada um dos meses subseqüentes Após o nº (enésimo) mês o montante acumulado ao final do período atingiria :

$S = 1000\,(1 + 0{,}1)^n$

De uma forma genérica, teremos para um principal P, aplicado a uma taxa de juros compostos i durante o período n :

$\boxed{S = P\,(1 + i)^n}$ **ou** $\boxed{M = C\,(1 + i)^n}$

Onde:

S / M = montante;
P / C = principal ou capital inicial ;
i = taxa de juros e
n = número de períodos que o principal P (capital inicial) foi aplicado.

NOTA: Na fórmula acima, as unidades de tempo referentes à taxa de juros (i) e do período (n), tem de ser necessariamente iguais. Este é um detalhe importantíssimo, que não pode ser esquecido! Assim, por exemplo, se a taxa for 2% ao mês e o período 3 anos, deveremos considerar 2% ao mês durante 3 x 12=36 meses.

4 – TAXA NOMINAL E TAXA REAL

4.1 - Taxa nominal

A taxa nominal de juros relativa a uma operação financeira, pode ser calculada pela expressão:

Taxa nominal = Juros pagos / Valor nominal do empréstimo

Assim, por exemplo, se um empréstimo de \$100.000,00, deve ser quitado ao final de um ano, pelo valor monetário de \$150.000,00, a taxa de juros nominal será dada por:

Juros pagos = J_p = \$150.000 – \$100.000 = \$50.000,00

Taxa nominal = i_n = \$50.000 / \$100.000 = 0,50 = 50%

4.2 - Taxa real

A taxa real expurga o efeito da inflação.

Um aspecto interessante sobre as taxas reais de juros é que, elas podem ser inclusive, negativas!

Vamos encontrar uma relação entre as taxas de juros nominal e real. Para isto, vamos supor que um determinado capital P é aplicado por um período de tempo unitário, a uma certa taxa nominal i_n .

O montante S_1 ao final do período será dado por $S_1 = P(1 + i_n)$.Consideremos agora que durante o mesmo período, a taxa de inflação (desvalorização da moeda) foi igual a j. O capital corrigido por esta taxa acarretaria um montante $S_2 = P (1 + j)$.

A taxa real de juros, indicada por r, será aquela que aplicada ao montante S_2, produzirá o montante S_1. Poderemos então escrever:

$S_1 = S_2 (1 + r)$

Substituindo S_1 e S_2 , vem:

$P(1 + i_n) = (1+r). P (1 + j)$

Daí então, vem que:

$(1 + i_n) = (1+r). (1 + j)$, onde:

i_n = taxa de juros nominal

j = taxa de inflação no período

r = taxa real de juros

Observe que se a taxa de inflação for nula no período, isto é, j = 0, teremos que as taxas nominal e real são coincidentes.

Veja o exemplo a seguir:

Numa operação financeira com taxas pré-fixadas, um banco empresta $120.000,00 para ser pago em um ano com $150.000,00. Sendo a inflação durante o período do empréstimo igual a 10%, pede-se calcular as taxas nominal e real deste empréstimo.

Teremos que a taxa nominal será igual a:

i_n = (150.000 – 120.000)/120.000 = 30.000/120.000 = 0,25 = 25%
Portanto i_n = 25%

Como a taxa de inflação no período é igual a j = 10% = 0,10, substituindo na fórmula anterior, vem:

$(1 + i_n) = (1+r).\ (1 + j)$

(1 + 0,25) = (1 + r).(1 + 0,10)

1,25 = (1 + r).1,10

1 + r = 1,25/1,10 = 1,1364

Portanto, r = 1,1364 – 1 = 0,1364 = 13,64%

Se a taxa de inflação no período fosse igual a 30%, teríamos para a taxa real de juros:

(1 + 0,25) = (1 + r).(1 + 0,30)

1,25 = (1 + r).1,30

1 + r = 1,25/1,30 = 0,9615

Portanto, r = 0,9615 – 1 = -,0385 = -3,85% e, portanto teríamos uma taxa real de juros negativa!

5 - VALOR PRESENTE E VALOR FUTURO

Deve ser acrescentado ao estudo dos juros compostos que o capital é também chamado de valor presente **(PV)** e que este não se refere necessariamente ao momento zero. Em verdade, o valor presente pode ser apurado em qualquer data anterior ao montante também chamado de valor futuro **(FV)**.

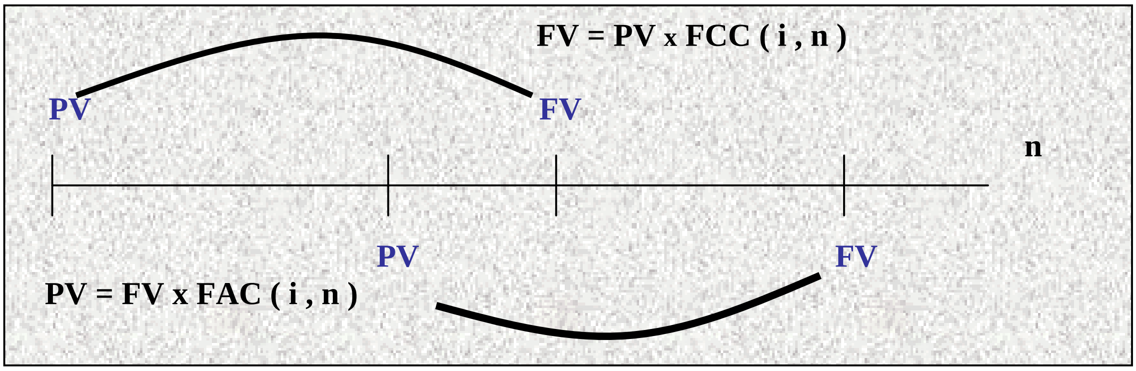
As fórmulas do valor presente (PV) e do valor futuro (FV) são iguais já vistas anteriormente, basta trocarmos seus correspondentes nas referidas fórmulas, assim temos:

$$\boxed{M = C \times (1 + i)^n} \quad \text{ou} \quad \boxed{FV = PV\,(1 + i)^n}$$

$$\boxed{C = \frac{M}{(1 + i)^n}} \quad \text{ou} \quad \boxed{PV = \frac{FV}{(1 + i)^n}}$$

Onde **$(1 + i)^n$** é chamado de fator de capitalização do capital, **FCC (i,n)** a juros compostos, e **$1 / (1 + i)^n$** é chamado de fator de atualização do capital, **FAC (i,n)** a juros compostos.

A movimentação de um capital ao longo de uma escala de tempo em juros compostos se processa mediante a aplicação destes fatores, conforme pode ser visualizado na ilustração abaixo:



Fonte: Elaborado pelo autor

Observe que FV no período n é equivalente a PV no período zero, se levarmos em conta a taxa de juros i. Esta interpretação é muito importante, como veremos no decorrer do curso. <u>É conveniente registrar que existe a seguinte convenção:</u> seta para cima, sinal positivo (dinheiro recebido) e seta para baixo, sinal negativo (dinheiro pago). Esta convenção é muito importante, inclusive quando se usa a calculadora HP 12C. Normalmente, ao entrar com o valor presente VP numa calculadora financeira, o fazemos seguindo esta convenção, mudando o sinal da quantia considerada como PV para negativo, usando a tecla CHS, que significa uma abreviação de "*change signal*", ou seja, "mudar o sinal". É conveniente ressaltar que se entrarmos com o PV positivo, a calculadora expressará o FV como um valor negativo e vice versa, já que as calculadoras financeiras, e aí se inclui a HP 12C, foram projetadas, considerando esta convenção de sinais. Usaremos sempre a convenção de sinal negativo para VP e em conseqüência, sinal positivo para FV. Veremos com detalhes este aspecto, no desenvolvimento do curso.

Exemplos Práticos:

Qual o valor de resgate de uma aplicação de R$ 12.000,00 em um título pelo prazo de 8 meses à taxa de juros composta de 3,5% a .m.?

Solução:

PV = R$ 12.000,00
n = 8 meses
i = 3,5 % a . m.
FV = ?

$FV= PV\,(1 + i)^{n} \longrightarrow FV= 12.000,00\,(1+0,035)^{8} \longrightarrow$

$FV= 12.000,00 \times 1,316 \longrightarrow FV= R\$\ 15.801,71$

Se uma pessoa deseja obter R$ 27.500,00 dentro de um ano, quanto deverá ela depositar hoje numa poupança que rende 1.7% de juros compostos ao mês?

Solução:

FV = R$ 27.500,00
n = 1 ano (12 meses)
i = 1.7% a . m.
PV = ?

$PV = \dfrac{FV}{(1 + i)^{n}} \longrightarrow PV = \dfrac{27.500,00}{(1 + 0,017)^{12}} \qquad PV = \longrightarrow \dfrac{27.500,00}{1,224} \longrightarrow$

PV = 22.463,70

<u>Exercícios Propostos 03:</u>

Aplicando-se R$ 1.000,00 por um prazo de dois anos a uma taxa de 5% ao semestre, qual será o montante no fim do período?

Resposta: R$ (?)

<u>Exercícios Propostos 04:</u>

Um capital de R$ 2.000.000,00 é aplicado durante um ano e três meses à taxa de 2% a.m. Quais os juros gerados no período?

Resposta: R$ (?)

Exercícios Propostos 05:

Determinado capital aplicado a juros compostos durante 12 meses, rende uma quantia de juros igual ao valor aplicado. Qual a taxa mensal dessa aplicação?

Resposta: R$ (?)

Exercícios Propostos 06:

Calcule o montante de R$1.000,00 aplicados a 10% a.a. durante 50 dias.

Resposta: R$ (?)

6 – Equivalência Financeira

Diz-se que dois capitais são equivalentes a uma determinada taxa de juros, se os seus valores em um determinado período n, calculados com essa mesma taxa, forem iguais.

Exemplo 01:

1º Conjunto		2º Conjunto	
Capital (R$)	**Vencimento**	**Capital (R$)**	**Vencimento**
1.100,00	**1 º a.a**	2.200,00	**1 º a.a**
2.420,00	**2 º a.a**	1.210,00	**2 º a.a**
1.996,50	**3 º a.a**	665,5	**3 º a.a**
732,05	**4 º a.a**	2.196,15	**4 º a.a**

Verificar se os conjuntos de valores nominais, referidos à data zero, são equivalentes à taxa de juros de 10% a.a.

Para o 1.º conjunto:

P_0 = 1.100 x FAC (10%; 1) + 2.420 x FAC (10%; 2) +
+ 1.996,50 x FAC (10%; 3) + 732,05 x FAC (10%; 4)
P_0 = 1.000 + 2.000 + 1.500 + 500
P_0 = 5.000,00

Para o 2.º conjunto:

P_0 = 2.200 x FAC (10%; 1) + 1.210 x FAC (10%; 2) +
+ 665,50 x FAC (10%; 3) + 2.196,15 x FAC (10%; 4)
P_0 = 2.000 + 1.000 + 500 + 1.500
P_0 = 5.000,00

Logo os dois conjuntos de capitais são equivalentes, pois P_0 de um é igual ao P_0 de outro.
Exemplo 02 :

Seja um capital de R$ 10.000,00, que pode ser aplicado alternativamente à taxa de 2% a.m ou de 24% a.a. Supondo um prazo de aplicação de 2 anos, verificar se as taxas são equivalentes:

Solução:

Aplicando o principal à taxa de 2% a.m. e pelo prazo de 2 anos teremos:

J_1 = R$ 10.000,00 x 0,02 x 24 **= R$ 4.800,00**

Agora se aplicarmos o principal à taxa de 24% a.a. e pelo prazo de 2 anos teremos:

J_2 = R$ 10.000,00 x 24 x 2 **= R$ 4.800,00**

OBS: Na utilização das fórmulas o prazo de aplicação (n) e a taxa (i) devem estar expressos na mesma unidade de tempo. Caso não estejam, é necessário ajustar o prazo ou a taxa.

7 – DESCONTOS SIMPLES

Existem dois tipos básicos de descontos simples nas operações financeiras: o desconto comercial e o desconto racional. Considerando-se que no regime de capitalização simples, na prática, usa-se sempre o desconto comercial, este será o tipo de desconto a ser abordado a seguir.

• **Desconto Racional:** Nesta modalidade de desconto a "recompensa pela liquidação do título antes de seu vencimento é calculada sobre o valor a ser liberado (Valor Atual).Incorpora os conceitos e relações básicas de juros simples. Veja":

J = P . i . n => **D = VD . d . n**

• **Desconto Comercial:** Nesta modalidade de desconto a "recompensa pela liquidação do título antes de seu vencimento é calculada sobre o Valor Nominal do título. Incorpora os conceitos de juros bancários que veremos detalhadamente a seguir":

J = P . i . n => **D = VN . d . n**

Vamos considerar a seguinte simbologia:

N = valor nominal de um título. **V = valor líquido, após o desconto.**

D_c = desconto comercial. **d = taxa de descontos simples.**

n = número de períodos.

Teremos:

$V = N - D_c$

No desconto comercial, a taxa de desconto incide sobre o valor nominal N do título. Logo:

$D_c = Ndn$

Substituindo, vem:

$V = N(1 - dn)$

Exemplo:

Considere um título cujo valor nominal seja R$10.000,00. Calcule o desconto comercial a ser concedido para um resgate do título 3 meses antes da data de vencimento, a uma taxa de desconto de 5% a.m.

Solução:

$V = 10000 \cdot (1 - 0{,}05 \cdot 3) = 8500$

$D_c = 10000 - 8500 = 1500$

Resp: valor descontado = R$ 8.500,00; desconto = R$1.500,00

8 - DESCONTO BANCÁRIO

Nos bancos, as operações de desconto comercial são realizadas de forma a contemplar as despesas administrativas (um percentual cobrado sobre o valor nominal do título) e o IOF - imposto sobre operações financeiras.
É óbvio que o desconto concedido pelo banco, para o resgate de um título antes do vencimento, através desta técnica, faz com que o valor descontado seja maior, resultando num resgate de menor valor para o proprietário do título.

Exemplo:

Um título de R$ 100.000,00 é descontado em um banco, seis meses antes do vencimento, à taxa de desconto comercial de 5% a.m. O banco cobra uma taxa de 2% sobre o valor nominal do título como despesas administrativas e 1,5% a.a. de IOF. Calcule o valor líquido a ser recebido pelo proprietário do título e a taxa de juros efetiva da operação.

Solução:

Desconto comercial: D_c = 100000 . 0,05 . 6 = 30000

Despesas administrativas: d_a = 100000 . 0,02 = 2000

IOF = 100000 . (0,015/360) . 180 = 750

Desconto total = 30000 + 2000 + 750 = 32750

Daí, o valor líquido do título será: 100000 - 32750 = 67250

Logo, V = R$ 67.250,00

A taxa efetiva de juros da operação será: i = [(100000/67250) - 1].100 = 8,12% a. m.

Observe que a taxa de juros efetiva da operação, é muito superior à taxa de desconto, o que é amplamente favorável ao banco.

Duplicatas

Recorrendo a um dicionário encontramos a seguinte definição de duplicata: Título de crédito formal, nominativo, emitido por negociante com a mesma data, valor global e vencimento da fatura, e representativo e comprobatório de crédito preexistente (venda de mercadoria a prazo), destinado a aceite e pagamento por parte do comprador, circulável por meio de endosso, e sujeito à disciplina do direito cambiário.

Observação:

a) A duplicata deve ser emitida em impressos padronizados aprovados por Resolução do Banco Central.

b) Uma só duplicata não pode corresponder a mais de uma fatura.

Considere que uma empresa disponha de faturas a receber e que, para gerar capital de giro, ela dirija-se a um banco para trocá-las por dinheiro vivo, antecipando as receitas. Entende-se como duplicatas, essas faturas a receber negociadas a uma determinada taxa de descontos com as instituições bancárias.

Exemplo:

Uma empresa oferece uma duplicata de R$ 50000,00 com vencimento para 90 dias, a um determinado banco. Supondo que a taxa de desconto acertada seja de 4% a. m. e que o banco, além do IOF de 1,5% a.a. , cobra 2% relativo às despesas administrativas, determine o valor líquido a ser resgatado pela empresa e o valor da taxa efetiva da operação.

SOLUÇÃO:

Desconto comercial = Dc = 50000 . 0,04 . 3 = 6000

Despesas administrativas = Da = 0,02 . 50000 = 1000

IOF = 50000(0,015/360).[90] = 187,50

Teremos então:

Valor líquido = V = 50000 - (6000 + 1000 + 187,50) = 42812,50

Taxa efetiva de juros = i = [(50000/42812,50) - 1].100 = 16,79 % a.t. = 5,60% a.m.

Resp: V = R$ 42812,50 e i = 5,60 % a.m.

Exercícios Propostos 07:

Um título de R$ 5.000,00 vai ser descontado 60 dias antes do vencimento. Sabendo-se que a taxa de juros é de 3% a.m., pede-se calcular o desconto comercial e o valor descontado.

Resposta: R$ (?)

Exercícios Propostos 08:

Um banco realiza operações de desconto de duplicatas a uma taxa de desconto comercial de 12% a . a., mais IOF de 1,5% a . a. e 2% de taxa relativa a despesas administrativas. Além disto, a título de reciprocidade, o banco exige um saldo médio de 10% do valor da operação. Nestas condições, para uma duplicata de valor nominal R$ 50000,00 que vai ser descontada 3 meses antes do vencimento, pede-se calcular a taxa efetiva de juros da operação. Resposta: R$ (?)

9 – FLUXO DE CAIXA

Conjunto de **entradas e saídas de dinheiro** (caixa) ao longo do tempo. Um diagrama de fluxo de caixa, é simplesmente a representação gráfica numa reta, dos períodos e dos valores monetários envolvidos em cada período, considerando-se uma certa taxa de juros i.

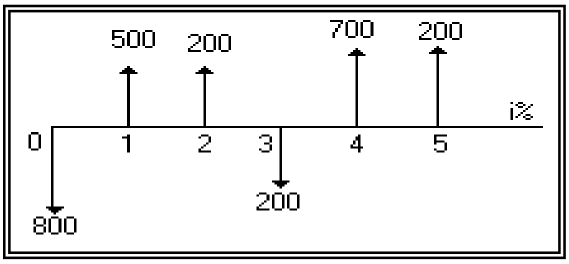
Traça-se uma reta horizontal que é denominada eixo dos tempos, na qual são representados os valores monetários, considerando-se a seguinte convenção:

• dinheiro recebido seta para cima

• dinheiro pago seta para baixo.

Exemplo:

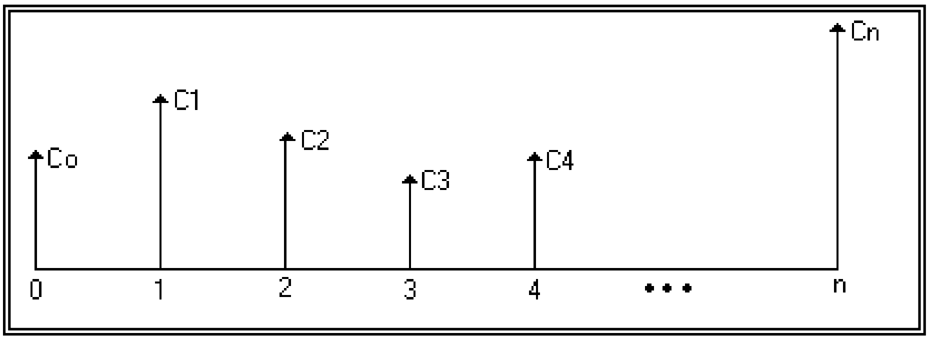
Veja o diagrama de fluxo de caixa a seguir:



O diagrama da figura acima, por exemplo, representa um projeto que envolve investimento inicial de 800, pagamento de 200 no terceiro ano, e que produz receitas de 500 no primeiro ano, 200 no segundo, 700 no quarto e 200 no quinto ano.

Convenção:	dinheiro recebido	flecha para cima	valor positivo
	dinheiro pago	flecha para baixo	valor negativo

Vamos agora considerar o seguinte fluxo de caixa, onde C_0, C_1, C_2, C_3, ..., C_n são capitais referidos às datas, 0, 1, 2, 3, ..., n para o qual desejamos determinar o valor presente (PV).



O problema consiste em trazer todos os capitais futuros para uma mesma data de referencia. Neste caso, vamos trazer todos os capitais para a data zero. Pela fórmula de Valor Presente vista acima, concluímos que o valor presente resultante - NPV - do fluxo de caixa, também conhecido como Valor Presente Líquido (VPL), dado será:

$$NPV = C_0 + \frac{C_1}{(1+i)^1} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \frac{C_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

Esta fórmula pode ser utilizada como critério de escolha de alternativas, como veremos nos exercícios a seguir.

Exercícios:

1 - Numa loja de veículos usados são apresentados ao cliente dois planos para pagamento de um carro:

Plano A: dois pagamentos, um de $ 1.500,00 no final do sexto mês e outro de $ 2.000,00 no final do décimo segundo mês.

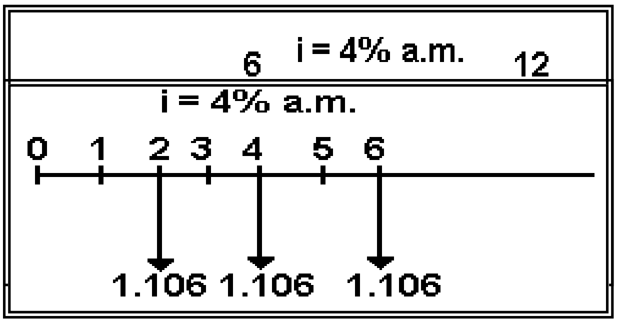
Plano B: três pagamentos iguais de $ 1.106,00 de dois em dois meses, com início no final do segundo mês.

Sabendo-se que a taxa de juros do mercado é de 4% a.m., qual o melhor plano de pagamento?

<u>SOLUÇÃO</u>:

Inicialmente , devemos desenhar os fluxos de caixa correspondentes:

PLANO A:



PLANOB:

Teremos para o plano A:

$$PV = \frac{1500}{1{,}04^{6}} + \frac{2000}{1{,}04^{12}} = 2434{,}66$$

Para o plano B, teremos:

$$PV = \frac{1106}{1{,}04^{2}} + \frac{1106}{1{,}04^{4}} + \frac{1106}{1{,}04^{6}} = 2842{,}06$$

Como o plano A nos levou a um menor valor atual (ou valor presente), concluímos que este plano A é mais atraente do ponto de vista do consumidor.

Exercício:

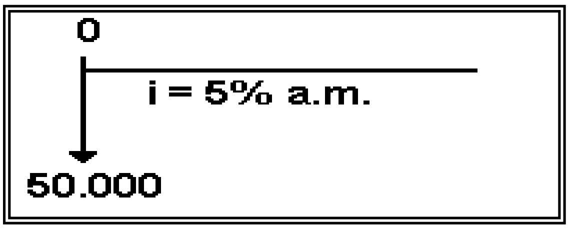
2 - Um certo equipamento é vendido à vista por $ 50.000,00 ou a prazo, com entrada de $ 17.000,00 mais três prestações mensais iguais a $ 12.000,00 cada uma, vencendo a primeira

um mês após a entrada. Qual a melhor alternativa para o comprador, se a taxa mínima de atratividade é de 5% a.m.?

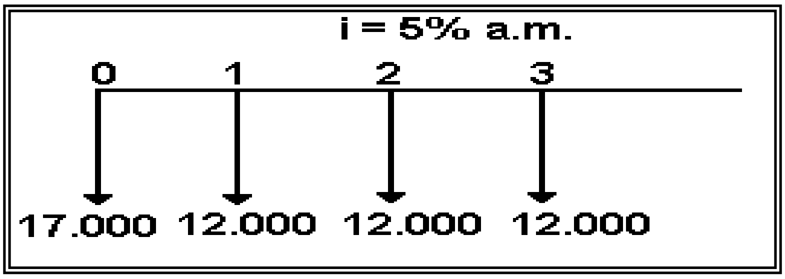
SOLUÇÃO:

Vamos desenhar os fluxos de caixa:

À vista:



A prazo:



Vamos calcular o valor atual para esta alternativa:

$$NPV = 17000 + \frac{12000}{1{,}05} + \frac{12000}{1{,}05^2} + \frac{12000}{1{,}05^3} = 49678{,}97$$

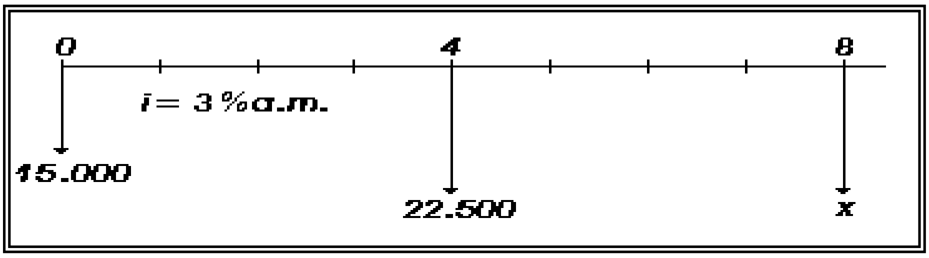
Como o valor atual da alternativa a prazo é menor, a compra a prazo neste caso é a melhor alternativa, do ponto de vista do consumidor.

Exercício:

3 - Um equipamento pode ser adquirido pelo preço de $ 50.000,00 à vista ou, a prazo conforme o seguinte plano:

Entrada de 30% do valor à vista, mais duas parcelas, sendo a segunda 50% superior à primeira, vencíveis em quatro e oito meses, respectivamente. Sendo 3% a.m. a taxa de juros do mercado, calcule o valor da última parcela.

SOLUÇÃO



Teremos:

$$\boxed{50000 = 15000 + \frac{22500}{1{,}03^4} + \frac{x}{1{,}03^8}}$$

Resolvendo a equação acima, obtemos x = 19013,00

Portanto, o valor da prestação é $19013,00.

Exercício Proposto 09:

Uma loja vende determinado tipo de televisor nas seguintes condições: R$ 400,00 de entrada, mais duas parcelas mensais de R$ 400,00, no final de 30 e 60 dias respectivamente. Qual o valor à vista do televisor se a taxa de juros mensal é de 3% ?

Resposta: R$ (?)

10 - NOÇÃO ELEMENTAR DE INFLAÇÃO E SALDO MÉDIO BANCÁRIO

Outro conceito importante no estudo da Matemática Financeira é o de inflação.

Entenderemos como **INFLAÇÃO** num determinado período de tempo, como sendo o aumento médio de preços, ocorrido no período considerado, usualmente medido por um índice expresso como uma taxa percentual relativa a este mesmo período.

Para ilustrar de uma forma simples, o conceito elementar de inflação apresentado acima, vamos considerar a tabela abaixo, onde está indicado o consumo médio mensal de uma determinada família em dois meses distintos e os custos decorrentes associados:

Indicadores		**Mês 01**		**Mês 02**	
Produto	**Quantidade**	**Preço ($)**	**Subtotal**	**Preço ($)**	**Subtotal**
Arroz	5 kg	1,20	6,00	1,30	6,50
Carne	15 kg	4,50	67,50	4,80	72,00
Feijão	4 kg	1,69	6,76	1,80	7,20
Óleo	2 latas	2,40	4,80	2,45	4,90

Leite	20 litros	1,00	20,00	1,10	22,00
Café	1 kg	7,60	7,60	8,00	8,00
Açúcar	10 kg	0,50	5,00	0,65	6,50
Passagens	120	0,65	78,00	0,75	90,00
TOTAL		**********	195,66	**********	217,10

A variação percentual do preço total desta cesta de produtos, no período considerado é igual a:

V = [(217,10 / 195,66) - 1] x 100 = 0,1096 = 10,96 %

Diremos então que a inflação no período foi igual a 10,96 %.

NOTAS:

a) Para o cálculo de índices reais de inflação, o número de itens considerado é bastante superior e são obtidos através de levantamento de dados em determinadas amostras da população, para se determinar através de métodos estatísticos, a "cesta de mercado", que subsidiará os cálculos;

b) A metodologia sugerida no exemplo acima é conhecida como método de Laspeyres ;

c) Podemos entender agora os motivos que determinam as diferenças entre os índices de inflação calculados entre instituições distintas tais como **FIPE, FGV, DIEESE**, entre outras.

10.1 - Juros e saldo médio em contas correntes

Vamos considerar o caso de uma conta corrente, da qual o cliente saca e deposita recursos ao longo do tempo. Vamos ver nesta seção, a metodologia de cálculo do saldo médio e dos juros mensais decorrentes da movimentação dessa conta.

As contas correntes associadas aos "cheques especiais" são exemplos corriqueiros da aplicação prática da metodologia a ser apresentada.

10.2 - Juros em contas correntes (cheques especiais)

Considere os capitais C_1, C_2, C_3, ... , C_k aplicados pelos prazos n_1, n_2, n_3, ... , n_k, à taxa de juros simples i. A fórmula abaixo, permite o cálculo dos juros totais J produzidos no período considerado:

$$J = i.(C_1.n_1 + C_2.n_2 + C_3.n_3 + ... + C_k.n_k)$$

O cálculo dos juros pelo método acima (conhecido como "Método Hamburguês") é utilizado para a determinação dos juros sobre os saldos devedores dos "cheques especiais".

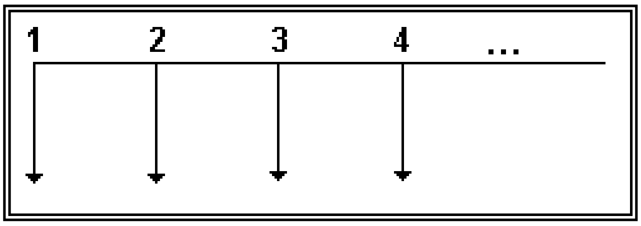
11 – SERIE DE PAGAMNTOS

Série de pagamentos - é um conjunto de pagamentos de valores R_1, R_2, R_3, ... R_n, distribuídos ao longo do tempo correspondente a n períodos, podendo esses pagamentos serem de valores constantes ou de valores distintos. O conjunto de pagamentos (ou recebimentos) ao longo dos n períodos, constitui - se num fluxo de caixa. Vamos resolver a seguir, os problemas nos quais $R_1 = R_2 = R_3 = ... R_n = R$, ou seja: pagamentos (ou recebimentos) iguais.

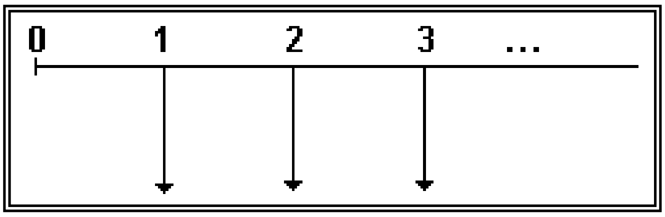
Quando a série de pagamentos (ou recebimentos) se inicia um período após a data zero, o fluxo recebe o nome de POSTECIPADO. Quando o início dos pagamentos ou recebimentos ocorre na data zero, o fluxo recebe o nome de ANTECIPADO.

Exemplos:

1 - Pagamentos no início dos períodos: Fluxo ANTECIPADO



2 - Pagamentos no final dos períodos: Fluxo POSTECIPADO



11.1 - Fator de acumulação de capital – FAC

O problema a resolver é o seguinte:

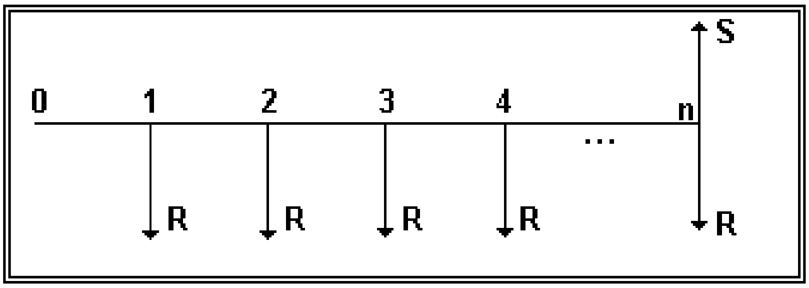
Determinar a quantia S acumulada a partir de uma série uniforme de pagamentos iguais a R, sendo i a taxa de juros por período.

Vamos considerar dois casos: fluxo postecipado e fluxo antecipado.

NOTA: na calculadora HP12C, R é expressa pela tecla PMT (pagamentos periódicos). Portanto R e PMT possuem o mesmo sentido, ou seja, a mesma interpretação. Da mesma forma, S corresponde a FV na calculadora HP 12C.

A) Fluxo postecipado

Considere o fluxo de caixa postecipado a seguir, ou seja: os pagamentos são feitos nos finais dos períodos.



Vamos transportar cada valor R para o tempo n, supondo que a taxa de juros é igual a i , lembrando que se trata de um fluxo de caixa POSTECIPADO, ou seja, os pagamentos são realizados no final de cada período.

Teremos:

$S = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-3} + ... + R(1+i) + R$

Colocando R em evidencia, teremos:

$S = R[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + ... + (1+i) + 1]$

Observe que a expressão entre colchetes é a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo $(1+i)^{n-1}$, último termo 1 e razão $1/(1+i)$.

Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, teremos:

Nota: em caso de dúvida, consulte sobre Progressão Geométrica

$(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + ... + (1+i) + 1 =$

$$= \frac{1.\frac{1}{1+i} - (1+i)^{n-1}}{\frac{1}{1+i} - 1} = \frac{\frac{1-(1+i)^n}{1+i}}{\frac{1-(1+i)}{1+i}} = \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = \frac{1-(1+i)^n}{-i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Substituindo o valor encontrado acima, vem finalmente que:

$$S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

• o fator entre colchetes é denominado Fator de acumulação de capital – FAC(i,n).

• assim, teremos: S = R . FAC(i,n). Os valores de FAC(i,n) são tabelados. Na prática, utilizam-se as calculadoras científicas ou financeiras, ao invés das tabelas.

Usando-se a simbologia adotada na calculadora HP 12C, onde R = PMT e S = FV, teremos a fórmula a seguir:

$$FV = \frac{PMT}{i}\left[(1+i)^n - 1\right]$$

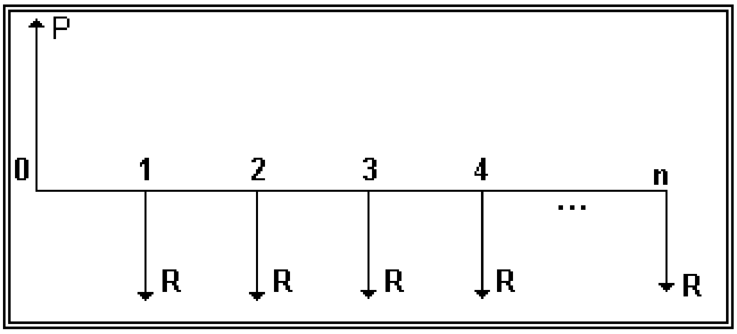
11.2 – Fator de valor atual – FVA

Considere o seguinte problema:

Determinar o principal P que deve ser aplicado a uma taxa i para que se possa retirar o valor R em cada um dos n períodos subseqüentes.

Este problema também poderia ser enunciado assim: qual o valor P que financiado à taxa i por período, pode ser amortizado em n pagamentos iguais a R?

Fluxo postecipado (pagamentos ao final de cada período, conforme figura a seguir):



Trazendo os valores R para o tempo zero, vem:

$$P = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^n} = R\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

O fator entre colchetes representa a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo 1/(1+i), razão 1/(1+i) e último termo $1/(1+i)^n$.

Teremos então, usando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.

O fato r entre colchetes será então igual a:

$$\boxed{\frac{\dfrac{1}{(1+i)^n}\cdot\dfrac{1}{1+i}-\dfrac{1}{1+i}}{\dfrac{1}{1+i}-1}=\frac{\dfrac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n.(1+i)}}{\dfrac{1-(1+i)}{1+i}}=\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n.(1+i)}\,x\,\frac{1+i}{-i}=\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}}$$

Substituindo, vem finalmente:

$$\boxed{P = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]}$$

- o fator entre colchetes é denominado Fator de valor atual – FVA(i,n);
- assim, teremos: P = R . FVA(i,n). Os valores de FVA(i,n) são tabelados;
- observe que P corresponde a PV e R corresponde a PMT na calculadora HP 12C.

Usando a simbologia da calculadora HP 12C, a fórmula acima ficaria:

$$\boxed{PV = PMT\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]}$$

12 - SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS

12.1. - Sistema De Amortização Constante – (SAC)

Nesse sistema as parcelas de amortização são iguais entre si. Os juros são calculados a cada período multiplicando-se a taxa de juros contratada pelo saldo devedor existente no período.

- Amortização numa data genérica t

Os valores são sempre iguais e obtidos por A= P/n onde $A_1 = A_2 = A_3 =$ ... An = A = cte e n = prazo total

Isso implica que a soma das n amortizações iguais seja:

t
t=1

- Saldo Devedor numa data genérica t

No sistema SAC o saldo devedor decresce linearmente em um valor igual à amortização A = P/n . Assim, o saldo devedor, logo após o pagamento da prestação (AMORTIZAÇÃO + JUROS) correspondente, será:

$$P_t = P - t.A \rightarrow P - t\,.\frac{P}{n} \rightarrow P.(\frac{n - t}{n}) \quad (\quad Pt = A(n - t)$$

Juros numa data genérica t

t = 1	J1 = P.i
t = 2	J2 = P1.i = (P – A).i = Pi – A . i
t = 3	J3 = P2.i = (P – 2A).i = Pi – 2 . A . i
t = 4	J4 = P3.i = (P – 3A).i = Pi – 3 . A . i
. . . .	. . . .
t = n	Jn = Pn-1 . i = [P – (n – 1) . A] . i = Pi – (n – 1) . A . i

Assim, o valor dos juros pagos na referida data será:

$$\boxed{\mathbf{J_t = Pi - (t - 1).Ai}}$$

ou então:

Jt = Pi – (t – 1). (EMBED Equation.3) .i = EMBED Equation.3

$$J_t = Pi/n - [\,n - (t - 1)] = \frac{Pi}{n}(n - t + 1)$$

$$\boxed{\mathbf{J_t = Ai\ (n - t + 1)}}$$

Onde: n = prazo total
t = o momento desejado

Somatório dos juros

Como a variação de juros no Sistema SAC se trata de uma progressão aritmética, o somatório dos juros de um determinado período se faz utilizando a fórmula do somatório dos n termos de uma P.A.

Com isso:

$$\boxed{\sum_{t=1}^{n} J_t = \frac{(J_1 + J_t)t}{2}}$$

Prestação numa data genérica t

Soma-se a amortização do momento desejado (que é constante em todos os momentos) como os juros referentes a este momento.

$R_1 \rightarrow A + J_1$

$R_2 \rightarrow A + J_2$

.

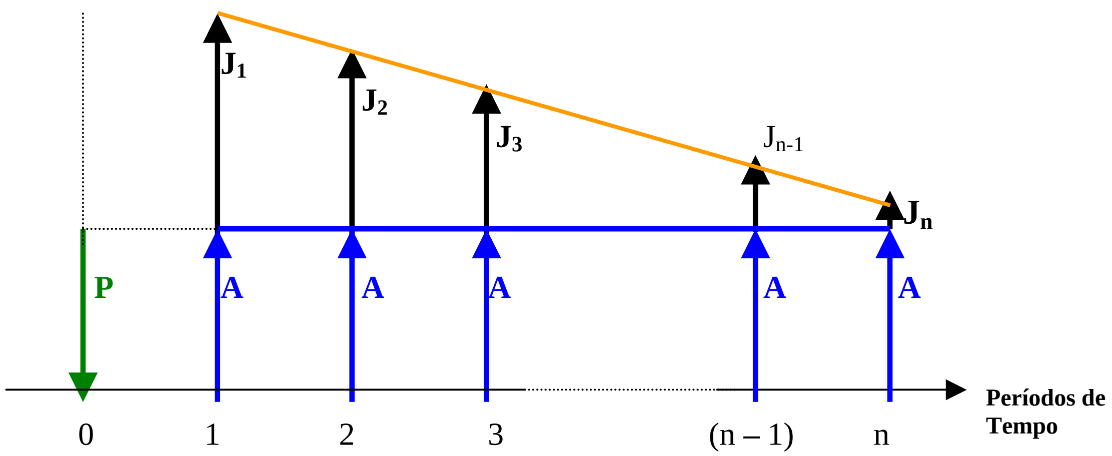
.

.

$R_3 \rightarrow A + J_3$

$R_t \rightarrow A + J_t$

Assim , o pagamento de um financiamento pelo sistema SAC, num prazo de n períodos e à uma taxa i por período seria como o diagrama e a tabela abaixo:



Fonte: Elaborado pelo autor

DATA	Saldo Devedor	Juros	Amortização	Prestação
T	$P_t = P_{t-1} - A$	$J_t = P_{t-1} \cdot i$	$A_t = A = P/n$	$Rt = A + Jt$
0	$P_0 = P$	-	-	-
1	$P_1 = P - A$	$J_1 = P \cdot i$	$A_1 = A$	$R_1 = A + J_1$
2	$P_2 = P_1 - A$	$J_2 = P_1 \cdot i$	$A_2 = A$	$R_2 = A + J_2$
3	$P_3 = P_2 - A$	$J_3 = P_2 \cdot i$	$A_3 = A$	$R_3 = A + J_3$
4	$P_t = P_{t-1} - A$	$J_t = P_{t-1} \cdot i$	$A_t = A$	$R_4 = A + J_4$
n	$P_n = P_{n-1} - A$	$J_n = P_{n-1} \cdot i$	$A_n = A$	$R_n = A + J_n$
Ordem de Obtenção das Parcelas	2.º	3.º	1.º	4.º

Vejamos agora um exemplo numérico:

P = $ 1.000,00
n = 4 prestações
i = 2% a.p.

t	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	1.000,00	-	-	-
1	750,00	250,00	20,00	270,00
2	500,00	250,00	15,00	265,00
3	250,00	250,00	10.00	260,00
4	0,00	250,00	5,00	255,00

9.2 - Sistema De Prestações Constantes - (PRICE)

Prestação numa data genérica t

No sistema PRICE a prestação é constante e em qualquer data t o seu valor é dado por:

Rt = R1 = R2 = ... = Rn = cte.
$R_t = R = P \times FPR(i,n) = \text{constante}$

Juros numa data genérica t

Os juros de um determinado período são calculados sobre o saldo devedor do período anterior.

$$\boxed{\mathbf{J_t = i \cdot P_{t-1}}}$$

Ou $J_t = R_t - A_t$ → $R_t = R = cte.$
$J_t = R - A_t$

Ou $J_t = R - A_t = R - A_1(1 + i)^{t-1}$
$A_1 = R – J_1 = R – P.i$

Assim: → $J_t = R – (R – P.i) (1 + i)^{t-1}$

Amortização numa data genérica t

No sistema PRICE o crescimento das amortizações é exponencial ao longo do tempo.

Dado que $A_t=R – J_t$ e $J= P.i$, então:

DATA 1 – final do 1.º período

Juros = $J_1 = P.i$

Amortização = $A_1 = R – J_1 = (R - P.i)$

DATA 2 – final do 2.º período

Juros = $J_2 = P_1.i = [P (1 + i) – R].i = [P (1 + i).i – R.i]$

Amortização = $A_2 = R – J_2 = R - P.(1 + i).i + R = R.(1 + i) – P.(1 + i).i$
$= (R – P.i) . (1 + i) = A_2 = A_1 (1 + i)$

DATA 3 – final do 3.º período

Juros = $J_3 = P_2.i = P.i – A_1.i – A_1 (1 + i).i$

Amortização = $A_3 = R – J_3 = R - [P.i – A_1.i - A_1 (1 + i).i]$
$A_3 = (R - P.i) + A_1.i + A_1 (1 + i).i$
$= A_1 + A_1.i + A_1 (1 + i).i$
$= A_1 (1 + i) + A_1 (1 + i).i$
$= A_1 (1 + i).(1 + i)$
$\mathbf{A_3 = A_1 (1 + i)^2}$

Então teríamos:

$A_2 = A_1 (1 + i)$
$A_3 = A_1 (1 + i)^2$
$A_4 = A_1 (1 + i)^3$
... .
$A_n = A_1 (1 + i)^{n-1}$

O que comprovaria a expressão:

$A_t = A_1.(1 + i)^{t-1}$; para uma data genérica t ou $A_t = A_1$. FPS(i%, (t - 1))

Para testar a consistência da fórmula acima:

$A_1 = 22.192$ $t = 3$
$i = 8\%$ a.a. $A_3 = ?$

$A_t = A_1.(1 + i)^{t-1}$ $A_3 = 22.192.(1 + 0{,}08)^2$
$A_3 = 22.192 \times 1{,}1664 = 25.884{,}75$

Ou
$A_t = A_1 \times$ FPS [i , (t-1)] pois $(1 + i)^{t-1}$ = FPS [i , (t-1)] desse modo, no exemplo anterior teríamos:

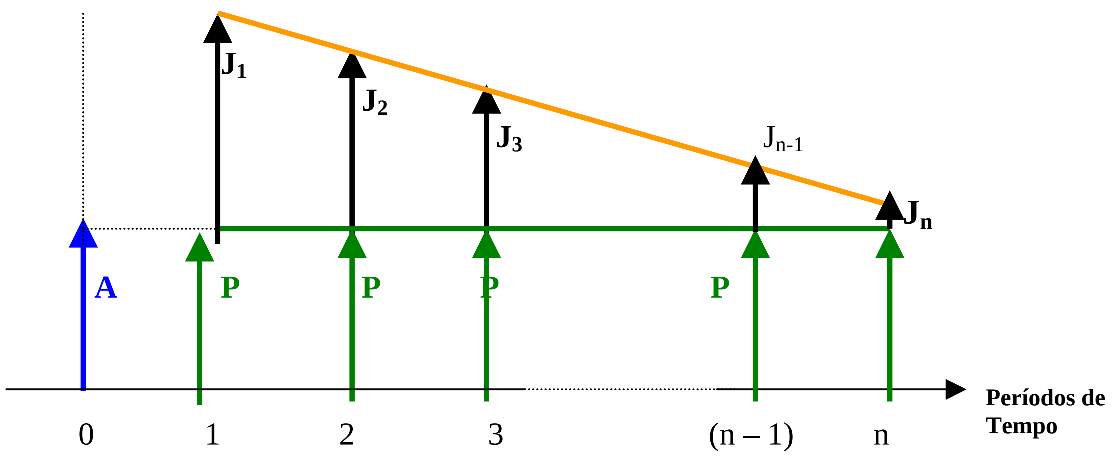
$A_3 = 22.192 \times$ FPS(8%,2) $= 22.192 \times 1{,}1664 = 25.884{,}75$

Saldo Devedor numa data genérica t

O Saldo devedor de um determinado período é dado pela diferença entre o saldo devedor do período anterior e a amortização do período.

$\boxed{P_t = P_{t-1} - A_t}$ $\boxed{Pt = R \times FRP\,[i\%, (n - t)]}$

Assim, para um empréstimo P, à taxa de juros i por período, com um prazo de n períodos, poderíamos elaborar a seguinte:



Fonte: Elaborado pelo autor

Datas	Saldo Devedor	Juros	Prestações Constantes	Amortização
(t)	$P_t = P_{t-1} - A_t$	$J_t = P_{t-1} \cdot i$	$R_t = R$	$At = R - J_t$
0	$Po = P$	-	-	-
1	$P_1 = P - A_1$	$J_1 = P.i$	R	$A_1 = R - J_1$
2	$P_2 = P_1 - A_2$	$J_2 = P_1.i$	R	$A_2 = R - J_2$
3	$P_3 = P_2 - A_3$	$J_3 = P_2.i$	R	$A_3 = R - J_3$
T	$P_t = P_{t-1} - A_t$	$J_t = P_{t-1}.i$	R	$A_t = R - J_t$
.	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
N	$P_n = P_{n-1} - A_n$	$J_n = P_{n-1}.i$	R	$A_n = R - J_n$
TOTAIS		$\sum_{1}^{n} J_t = nR - P$	$\sum R = n.R$	$\sum_{t=1}^{t=n} A_t = P$
Ordem de obtenção de parcelas	4.º	2.º	1.º	3.º

Vejamos agora um exemplo numérico:

P = 1.000,00
i = 2% a.p.
n = 4 prestações

t	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	1.000,00	-	-	-
1	757,38	242,62	20,00	262,62
2	509,91	247,47	15,15	262,62
3	257,49	252,42	10,20	262,62
4	-	257,49	5,15	262,62

Um financiamento pelo Sistema Price pode ser calculado utilizando-se máquinas financeiras, pois suas prestações são constantes.

9.3 - Sistema De Amortização Mista – (SAM)

Aqui o valor da prestação é obtido através da média aritmética das prestações obtido através do sistema **PRICE** e **SAC**.

Ex.:

P = 1.000,00 i = 8 % a.a. n = 4 anos

SIST. PRICE

ANO	SALDO DEVEDOR	Juros	Prestação	Amotização	Saldo Final
					1.000,00
1	1.000,00	80,00	301,92	221,92	778,08
2	778.08	62,25	301,92	239,67	538,41
3	538,41	43,07	301,92	258,85	279,56
4	270,56	22,36	301,92	279,56	∅

SIST. SAC

ANO	SALDO DEVEDOR	Juros	Prestação	Amotização	Saldo Final
					1.000,00
1	100,00	80,00	330,00	250,00	750,00
2	750,00	60,00	310,00	250,00	500,00
3	500,00	40,00	290,00	250,00	250,00
4	250,00	20,00	270,00	250,00	∅

SIST. SAM

Ano	Prest. PRICE	PREST. SAC	SOMA	PREST. SAM
1	301,92	330,00	631,92	315,96
2	301,92	310,00	611,92	305,96
3	301,92	290,00	591,92	295,96
4	301,92	270,00	571,92	285,96

Essa modalidade de pagamento é conhecida como Sistema de Amortização Mista **(SAM)** e vem sendo utilizada na liquidação de financiamento imobiliário.

NOTAS IMPORTANTES:

a) a taxa de juros i deve sempre ser expressa em relação ao número de períodos n ;

b) Exemplo: se i for 2% ao mês (2% a. m.), o número de períodos deve ser também expresso em meses; se i for 10% ao trimestre 10% a. t.), o número de períodos deve ser expresso em trimestres e assim sucessivamente.

c) Nas calculadoras financeiras - a HP 12C por exemplo - **P** é indicado pela tecla **PV,** que significa **PRESENT VALUE** (Valor presente), **S** é indicado pela tecla **FV**, que significa **FUTURE VALUE** (Valor Futuro) e **R** é indicado pela tecla **PMT,** que significa **PAYMENT** (Pagamento).

d) Para fazer download de uma calculadora HP12C, na Internet clique em http:// www.zaz.com.br/matematica.;

FATORES:

1 - Conhecendo-se P, i e n, calcular S

$$\boxed{S = P(1+i)^n}$$

2 - Conhecendo-se S, i e n, calcular *P*

Conseqüência imediata da fórmula anterior:

$$\boxed{P = \frac{S}{(1+i)^n}}$$

3 - Conhecendo-se R, i e n, determinar S

$$\boxed{S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]}$$

4 - Conhecendo-se R, i e n, determinar P

Conseqüência imediata da fórmula anterior.

$$\boxed{P = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]}$$

5 - <u>Conhecendo-se S, i e n, determinar R</u>

$$\boxed{R = S\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]}$$

6 - <u>Conhecendo P, i e n, determinar R</u>

$$\boxed{R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]}$$

Agora que conhecemos a funcionalidade da matemática financeira vamos resolver estes **Exercícios Aplicados**.

1 - Calcular os juros simples produzidos por $40.000,00, aplicados à taxa de 36% a.a. , durante 125 dias.

2 - Um empréstimo de $8.000,00 rendeu juros de $2.520,00 ao final de 7 meses. Qual a taxa de juros do empréstimo?

3 - Qual o capital que aplicado a juros simples de 1,2% a.m. rende $3.500,00 de juros em 75 dias?

4 - Por quanto tempo um capital de $11.500,00 foi aplicado para que rendesse $1.725,00 de juros, sabendo-se que a taxa de juros de mercado é de 4,5% a.m.?

5 - Que capital produziu um montante de $20.000,00, em 8 anos, a uma taxa de juros simples de 12% a.a.?

6 - Calcule o montante resultante da aplicação de $70.000,00 à taxa de 10,5% a.a. durante 145 dias.

7 - A que taxa mensal o capital de $38.000,00 produzirá o montante de R$ 70.300,00 em 10 anos?

8 - Um capital é aplicado a juros simples de 5% ao semestre (5 % a.s.), durante 45 dias. Após este prazo, foi gerado um montante de $886.265,55. Qual foi o capital aplicado?

9 - Que capital aplicado a 3% ao bimestre (3% a.b.), por um prazo de 75 dias, proporcionou um montante de $650.000,00?

10 - Um capital de $5.380,00 aplicado por 3 meses e 18 dias, rendeu $1839,96 de juros ao final do período. Qual a taxa mensal de juros simples?

11 - Um capital P foi aplicado a juros simples de 15% ao bimestre (15% a.b.), por um prazo de 5 meses e 13 dias e, após este período, o investidor recebeu $10.280,38. Qual o valor P do capital aplicado?

12 - Obteve-se um empréstimo de $10.000,00 , para ser liquidado por $14.675,00 no final de 8 meses e meio. Qual a taxa de juros anual cobrada nessa operação?

13 - Em quanto tempo um capital aplicado a 48% a.a. dobra o seu valor?

14 - Determinar o capital necessário para produzir um montante de $798.000,00 no final de um ano e meio, aplicado a uma taxa de 15% ao trimestre (15% a.t.).

15 - Determinar o montante correspondente a uma aplicação de $450.000,00 por 225 dias, à taxa de 5,6% ao mês (5,6% a.m.).

16 - Se possuo um título com valor nominal de $15.000,00 com vencimento daqui a 2 anos e a taxa de juros simples correntes é de 28% a.a. , qual o valor atual deste título nas seguintes datas:

a) hoje

b) daqui a um ano

c) 4 meses antes do vencimento.

17 - João tomou emprestado $20.000,00 de Carlos para pagá-lo após 2 anos. A taxa acertada de juros simples foi de 30% a.a. . Quanto Carlos poderia aceitar, se 6 meses antes do vencimento da dívida, João quisesse resgatá-la e se nesta época o dinheiro valesse 25% a.a. ?

18 - João tomou emprestado certa quantia de Carlos à taxa de juros simples de 28,8% a.a.. Sabendo-se que João pagou $2.061,42 para Carlos, saldando a dívida 2 meses antes do seu vencimento e que nesta época a taxa corrente de mercado era de 25,2% a.a., quanto João tomou emprestado e qual era o prazo inicial se os juros previstos eram de $648,00?

19 - João aplicou $10.000,00 à taxa de 30% a.a. pelo prazo de 9 meses. Dois meses antes da data de vencimento, João propôs a transferência da aplicação para Paulo. Quanto Paulo deverá pagar pelo título, se a taxa de juros simples do mercado for de 35% a.a. ?

20 - Quanto tempo deverá permanecer aplicado um capital para que o juro seja igual a duas vezes o capital, se a taxa de juros simples for igual a 10% a.a.?